Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Вариант 195

Инструкция по выполнению работы

На выполнение заданий варианта КИМ по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.
Часть 1 содержит 10 заданий (задания В1–В10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.
Часть 2 содержит 11 заданий (задания В11–В15 и С1–С6) повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.
Ответом к каждому из заданий В1–В15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.
Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.
При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.
Советуем выполнять задания в том порядке, как они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.
Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В 1. Теплоход рассчитан на 750 пассажиров и 25 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 70 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

Решение

Всего пассажиров 750+25=775(чел)

Потребуется 775:70≈11,07(лодок)

Ответ 12

В 2 Шариковая ручка стоит 10 рублей. Какое наибольшее число таких ручек можно будет купить на 100 рублей после повышения цены на 20%?

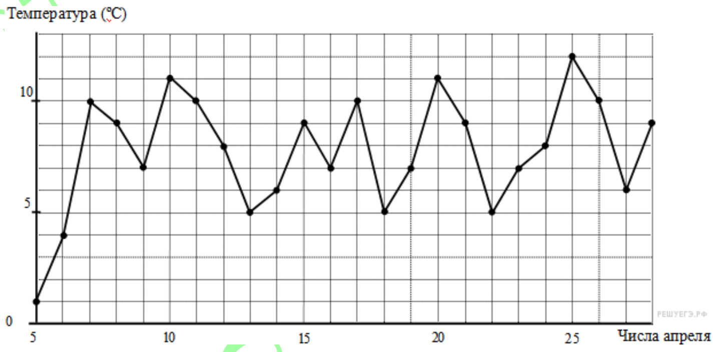
Решение

Новая цена ручки 10+10·0,2=12 (руб)

На 100 руб можно купить 100:12≈8,33(шт)

Ответ: 8.

В 3 .



На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Сочи каждый день с 5 по 28 апреля 1998 года. На оси абсцисс отмечены дни, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку наибольшую среднесуточную температуру воздуха в Сочи в период с 7 по 24 апреля.

Решение.

Из графика видно, что наибольшая среднесуточная температура воздуха в период с 7 по 24 апреля составляла 11 °С.

Ответ: 11.

В 4

От дома до дачи можно доехать на автобусе, на электричке или на маршрутном такси. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в часах.

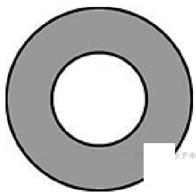
	1	**2**	**3**
Автобусом	От дома до автобусной станции — 5 мин.	Автобус в пути: 2 ч 5 мин.	От остановки автобуса до дачи пешком 10 мин.
Электричкой	От дома до станции железной дороги — 30 мин.	Электричка в пути: 1 ч 40 мин.	От станции до дачи пешком 5 мин.
Маршрутным такси	От дома до остановки маршрутного такси — 20 мин.	Маршрутное такси в дороге: 1 ч 30 мин.	От остановки маршрутного такси до дачи пешком 35 мин.

Решение.

При поездке на автобусе потребуется времени 5 мин. + 2 ч. 5 мин. + 10 мин. = 2 ч. 20 мин.
При поездке электричкой потребуется времени 30 мин. + 1 ч. 40 мин. + 5 мин. = 2 ч. 15 мин.
При поездке маршрутным такси потребуется времени 20 мин. + 1 ч. 30 мин. + 35 мин. = 2 ч. 25 мин.
Тем самым, наименьшее время составляет 2 часа 15 минут, то есть два с четвертью часа — 2,25 часа.

Ответ: 2,25.

В 5 Найдите площадь кольца, ограниченного концентриче скими окружностями, радиусы которых равны $\frac{3}{\sqrt{\pi}}$и $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$.



Решение.

Площадь круга определяется формулой $S = \pi R^2$. Площадь кольца равна разности площадей первого и второго круга.

Поэтому площадь кольца: $S = S_1 - S_2$ = 9-4=5

Ответ: 5.

В 6 Вася, Петя, Коля и Лёша бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет Петя.

Решение.

Жребий начать игру может выпасть каждому из четырех мальчиков. Вероятность того, что это будет именно Петя, равна одной четвертой.

Ответ: 0,25.

В 7. Решите уравнение x^2+5=$(x + 5)^2$

Решение.

$$x^2 + 5 = x^2 + 10x + 25$$

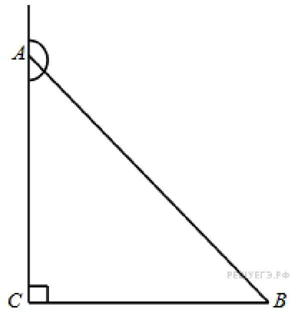
10x=-20

x=-2

Ответ: -2

В 8 .

В треугольнике ABCугол Cравен 90°, синус внешнего угла при вершине Aравен 0,5, $AB = 8$. Найдите BC.



Решение.

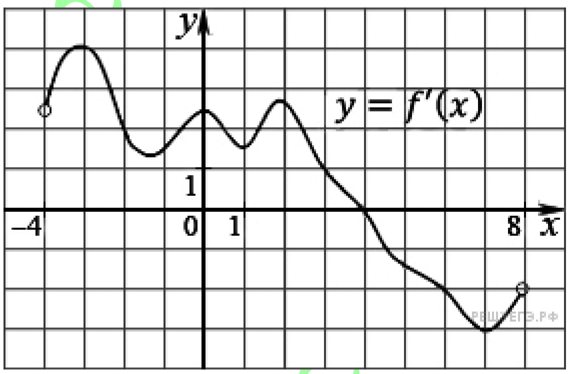
Так как

$$BC = AB \cdot \sin A = AB \cdot \sin A_{\text{внеш}} = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

Ответ: 4.

В 9

На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−4; 8). Найдите точку экстремума функции *f(x)* на отрезке [−2; 6].

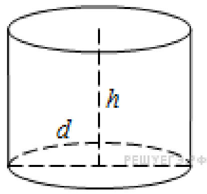


Решение.

Если производная в некоторой точке равна нулю, а в ее окрестности меняет знак, то это точка экстремума. На отрезке [–2; 6] график производной пересекает ось абсцисс, производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, точка 4 является точкой экстремума.

Ответ: 4.

В 10 . Площадь боковой поверхности цилиндра равна 2π, а диаметр основания — 2. Найдите высоту цилиндра.



Решение.
Площадь боковой поверхности цилиндра находится по формуле: $S_{\text{бок}} = 2\pi rh$, значит, $h=\frac{2\pi}{2\pi\cdot 1}=1$

Ответ:1.

ЧАСТЬ 2

Ответом на задания В11–В15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В 11 . Найдите значение выражения $\log_4 \log_6 36$

Решение.
$\log_4 \log_6 36=\log_4 2=0{,}5$
Ответ: 0,5.

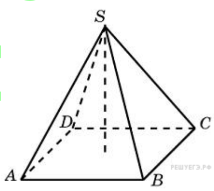
В 12 . Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 20$м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 5$ м/с^2. За t – секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 30 метров. Ответ выразите в секундах.
Решение.
Найдем, за какое время t, прошедшее от момента начала торможения, автомобиль проедет 30 метров:

$$20t - 2,5t^2 = 30 \Leftrightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=6, \\ t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 2$$.

Значит, через 2 секунды после начала торможения автомобиль проедет 30 метров.

Ответ:2

В 13. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 8, боковое ребро равно 10. Найдите ее объем.



Решение.
По теореме Пифагора найдем, что половина диагонали основания равна 6. Тогда диагональ основания равна 12, а сторона – $\frac{12}{\sqrt{2}}$ и площадь S=72

Тогда объем пирамиды $V=\frac{1}{3}$ S H . V=192
Ответ: 192.

B 14 Первый и второй насосы наполняют бассейн за 9 минут, второй и третий — за 14 минут, а первый и третий — за 18 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

Решение.

Наименьшее общее кратное чисел 9, 14 и 18 равно 126. За 126 минут первый и второй, второй и третий, первый и третий насосы (каждый учтен дважды) заполнят 14 + 9 + 7 = 30 бассейнов. Следовательно, работая одновременно, первый, второй и третий насосы заполняют 15 бассейнов за 126 минут, а значит, 1 бассейн за 8,4 минуты.

Ответ: 8,4.

Приведём другое решение.

За одну минуту первый и второй насосы заполнят 1/9 бассейна, второй и третий — 1/14 бассейна, а первый и третий — 1/18 бассейна. Работая вместе, за одну минуту два первых, два вторых и два третьих насоса заполнят

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{14}+\frac{1}{18}=\frac{14+9+7}{126}=\frac{5}{21}$$ бассейна.

Тем самым, они могли бы заполнить бассейн за 21/5 минуты или за 4,2 минуты. Поскольку каждый из насосов был учтен два раза, в реальности первый, второй и третий насосы, работая вместе, могут заполнить бассейн за 8,4 минуты.

B 15. Найдите наибольшее значение функции $y=15x-3\sin x+5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции: $y'=15-3\cos x$. Уравнение $y'=0$ не имеет решений, производная положительна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является возрастающей.

Следовательно, наибольшим значением функции на заданном отрезке является

$$y(0)=15\cdot 0-3\cdot 0+5=5.$$

Ответ: 5.

Для записи решений и ответов на задания С1-С6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

С 1 Решите уравнение $(6\sin^2 x+5\sin x-4)\cdot\sqrt{-7\cos x}=0$.

Решение.

Если $\cos x>0$, то решений нет. Если $\cos x=0$, то $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. Если $\cos x<0$, то $6\sin^2 x+5\sin x-4=0$, откуда $\sin x=-\frac{4}{3}$ или $\sin x=\frac{1}{2}$. Уравнение $\sin x=-\frac{4}{3}$ не имеет решений. Учитывая, что $\cos x<0$, из уравнения $\sin x=\frac{1}{2}$ получаем:

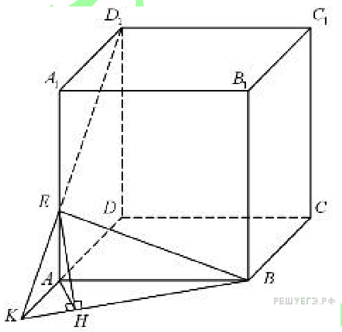
$$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

С 2.

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1отмечена точка Eтак, что $AE : EA_1 = 1 : 2$. Найдите угол между плоскостями ABCи BED_1.

Решение.



Прямая D_1Eпересекает прямую ADв точке K. Плоскости ABCи BED_1пересекаются по прямой KB.

Из точки Eопустим перпендикуляр EHна прямую KB, тогда отрезок AH(проекция EH) перпендикулярен прямой KB. Угол AHEявляется линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABCи BED_1.

Поскольку $AE : EA_1 = 1 : 2$, получаем:

$$AE = \frac{AA_1}{3} = 1; EA_1 = AA_1 - AE = 2.$$

Из подобия треугольников A_1D_1Eи AKEнаходим:

$$AK = \frac{AE}{EA_1} \cdot A_1D_1 = 1.$$

В прямоугольном треугольнике AKBс прямым углом A: $AB = 2$; $AK = 1$; $BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \sqrt{5}$, откуда высота

$$AH = \frac{AK \cdot AB}{BK} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Из прямоугольного треугольника AHEс прямым углом Aполучаем:

$$\operatorname{tg} \angle AHE = \frac{AE}{AH} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \angle AHE = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ может быть представлен и в другой форме: $\angle AHE = \arcsin \frac{\sqrt{5}}{3}$ или $\angle AHE = \arccos \frac{2}{3}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}$.

С3

а)Решите неравенство $7\log_9(x^2 - x - 6) \le 8 + \log_9 \frac{(x+2)^7}{x-3}$

б)Решите неравенство $\frac{1}{3^{x-1}} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{3^{x+1}} \le 52$

в)Найдите все целые решения первого неравенства ,не удовлетворяющие второму неравенству.

Решение

а)Решим первое неравенство $7\log_9(x^2-x-6)\le 8+\log_9\frac{(x+2)^7}{x-3}$ на О Д З

$$\begin{cases} 7\log_9(x^2-x-6)-\log_9\frac{(x+2)^7}{x-3}\le 8 \\ \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-2 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_9(x+2)^7(x-3)^7-\log_9\frac{(x+2)^7}{x-3}\le 8 \\ \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-2 \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} \log_9(x-3)^8\le 8 \\ \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-2 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} /x-3/\le 9 \\ \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-2\,. \end{array}\right. \end{cases}$$

Решение первого неравенства :[-6 : -2), (3;12].

б) Решим второе неравенство : $\frac{1}{3^{x-1}}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{3^{x+1}}\le 52$

$$\frac{1}{3^x}(3+1+\frac{1}{3})\le 52\ . \quad x\ge -\log_3 12$$

Решение второго неравенства :[-$\log_3 12$; ∞)

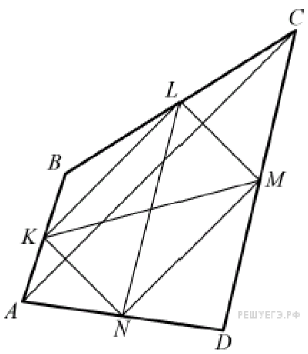
в) Все целые решения первого неравенства ,не удовлетворяющие второму неравенству : -6,-5.-4,-3

Ответ: а) [-6;2),(3;12]

б) [-$\log_3 12$; ∞)

в)-6,-5,-4,-3

С 4 Дан четырёхугольник $ABCD$.



а) Докажите, что отрезки LN и KM,соединяющие середины его противоположных сторон, делят друг друга пополам.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если $LM=3\sqrt{3}$, $KM=6\sqrt{3}$,$\angle KML=60^\circ$.

Решение.

а) Пусть $K,\ L,\ M$ и N — середины сторон $AB,\ BC,\ CD$ и AD четырёхугольника $ABCD$ соответственно. Тогда KL и MN — средние линии треугольников ABC и ADC. Значит, $KL = \frac{1}{2}AC = MN$ и $KL||AC||MN$, поэтому $KLMN$ — параллелограмм. Его диагонали KM и LN делят друг друга пополам, что и требовалось доказать.

б) В треугольнике KLM имеем:

$$KL^2 = KM^2 + ML^2 - 2KM \cdot ML \cdot 60^\circ = 81.$$

Значит, $KL = 9$. Тогда $KM^2 = KL^2 + LM^2$, поэтому треугольник KLM прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине L. Четырёхугольник $KLMN$ — прямоугольник, поэтому

$$S_{KLMN} = KL \cdot LM = 9 \cdot 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}.$$

Отрезок KL является средней линией треугольника ABC, поэтому $S_{KBL} = \frac{1}{4}S_{ABC}$. Аналогично $S_{MDN} = \frac{1}{4}S_{ADC}$. Тогда, имеем:

$$S_{KBL} + S_{MDN} = \frac{1}{4}S_{ABC} + \frac{1}{4}S_{ADC} = \frac{1}{4}(S_{ABC} + S_{ADC}) = \frac{1}{4}S.$$

Где S — искомая площадь четырёхугольника $ABCD$. Аналогично $S_{CML} + S_{AKN} = \frac{1}{4}S$. Поэтому

$$S_{KLMN} = S - \frac{1}{4}S - \frac{1}{4}S = \frac{1}{2}S.$$

Следовательно,

$$S = 2S_{KLMN} = 2 \cdot 27\sqrt{3} = 54\sqrt{3}.$$

Ответ: $54\sqrt{3}$.

С 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2 + 12x + |y| + 27 = 0, \\ x^2 + (y-a)(y+a) = -12(x+3) \end{cases}$ имеет ровно 4 решения.

Решение.

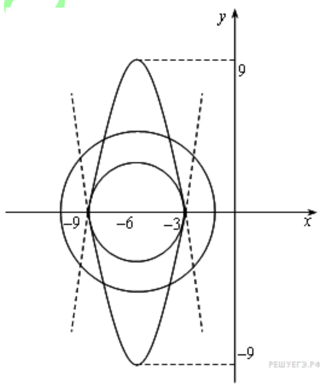
Преобразуем систему:

$$\begin{cases} |y| = 9 - (x+6)^2, \\ (x+6)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

Первое уравнение задает части двух парабол:

$$y = \begin{cases} 9 - (x+6)^2, & y \geq 0, \\ (x+6)^2 - 9, & y < 0 \end{cases}$$

(см. рисунок).



Второе уравнение задает окружность радиусом $|a|$ с центром $(-6;\ 0)$.

На рисунке видно, что четыре решения системы получаются в двух случаях.
1. Окружность касается каждой из ветвей обеих парабол.

2. Окружность пересекает каждую из ветвей обеих парабол в двух точках, лежащих по разные стороны от оси абсцисс.

Составим уравнение для ординат общих точек окружности и параболы $y = 9 - (x+6)^2$. Получим: $y = 9 - (a^2 - y^2)$, откуда

$$y^2 - y + (9 - a^2) = 0.$$

Чтобы окружность касалась парабол, уравнение должно иметь нулевой дискриминант: $1 + 4a^2 - 36 = 0$, откуда

$$a = \pm\frac{\sqrt{35}}{2}.$$

Во втором случае радиус окружности заключен между числами 3 и 9.

Ответ: $(-9,\ -3)$, $-\frac{\sqrt{35}}{2}$, $\frac{\sqrt{35}}{2}$, $(3,\ 9)$.

С 6 Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(n \geq 3)$.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 14?

б) Каково наибольшее значение n , если сумма всех данных чисел меньше 900?

в) Найдите все возможные значения n , если сумма всех данных чисел равна 123.

Решение.

Без ограничения общности можно считать, что числа составляют возрастающую арифметическую прогрессию. Обозначим *a* - первый член этой прогрессии, а *d* - ее разность. тогда сумма ее членов равна $s = \frac{2a + d(n-1)}{2} \cdot n$.

а) Да, может. Числа 2,3,4,5 составляют арифметическую прогрессию, а их сумма равна 14.

б) Для суммы членов арифметической прогрессии верно равенство $s = \frac{2a + d(n-1)}{2} \cdot n \geq \frac{2 + (n-1)}{2} \cdot n = \frac{n(n+1)}{2}$, тогда $\frac{n(n+1)}{2} < 900$ откуда находим $n \leq 41$.

Сумма членов прогрессии 1, 2, 3,...41 равна 861. Значит $n = 41$.

в) Для суммы членов арифметической прогрессии верно: $s = \frac{2a + d(n-1)}{2} \cdot n = 123;$
$(2a + d(n-1))n = 246 = 2 \cdot 3 \cdot 41$ таким образом, число *n* является делителем числа 246. Если $n \geq 41$, то $(2a + d(n-1))n \geq 42 \cdot 41 > 246$, следовательно, $n < 41$. Поскольку $n \geq 3$, получаем, $n = 3$ или $n = 6$.

Прогрессии из 3 и 6 членов с суммой 123 существуют: например, 40, 41, 42 и 18, 19, 20, 21, 22, 23.

Ответ: а) да; б) 41; в) 3; 6.